三维时空中的引力

姓名：潘瓒　学号：201228001207012　邮箱：panzan@itp.ac.cn

上世纪80年代中叶，$2+1$维时空中的引力理论受到物理学家的重视，主要是由于两个方向的工作：Diser，Jackiw和't Hooft系统研究了点源的动力学行为[3]，展示了该理论作为量子引力玩具模型的一些有趣性质；Witten发现$2+1$维引力可以表示成Chern-Simons形式[6]，揭示了它与拓朴场论、三维流形以及量子群等领域的联系。

选取闵氏空间的度规$(-,+,+)$，则$2+1$维时空的Einstein-Hilbert作用量为

$$I=\frac{1}{16\pi G}\int_M \mathrm{d}^3x\,\sqrt{-g}(R-2\Lambda)+I_\mathrm{m} \tag{1}$$

其中Λ为宇宙学常数，I_m为质量项。对度规变分得到场方程

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu} \tag{2}$$

考虑$\Lambda=0$的真空解，我们有$R_{\mu\nu}=0$。由于三维时空中的曲率张量可以写为[5]

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho}-g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma}+g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}-\frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R \tag{3}$$

所以，$R_{\mu\nu}=0$给出曲率张量为零，即时空是平直的。在D维时空中，引力子的极化自由度为

$$\frac{1}{2}(D-2)(D-1)-1 \tag{4}$$

当$D=3$时极化自由度为零，这表明$2+1$维时空中不存在引力波。如果取弱场近似$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$，则Einstein场方程(2)为

$$\Box^2\bar{h}_{\mu\nu}=16\pi GT_{\mu\nu},\quad \bar{h}_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{5}$$

其中我们取了谐和坐标条件$\partial_\mu\bar{h}^\mu{}_\nu=0$。对于Newton极限$T_{00}=-\rho$，我们有

$$\bar{h}_{00}=-4\Phi,\quad \nabla^2\Phi=4\pi G\rho \tag{6}$$

其中Φ为Newton引力势。此时，测地线方程即为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}\partial_i h_{00}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{7}$$

所以，在$2+1$维引力理论的Newton极限下，静止的点质量之间没有力的作用。

如果时空M同构于$\mathbb{R}\times\Sigma$，则我们可以把度规进行Arnowitt-Deser-Misner分解[2]

$$\mathrm{d}s^2=-N^2\mathrm{d}t^2+g_{ij}(\mathrm{d}x^i+N^i\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j+N^j\mathrm{d}t) \tag{8}$$

记Σ的曲率为K_{ij}，协变导数为${}^{(2)}\nabla$，不难算出

$$K_{ij}=\frac{1}{2N}\left(\dot{g}_{ij}-{}^{(2)}\nabla_iN_j-{}^{(2)}\nabla_jN_i\right) \tag{9}$$

于是，Einstein-Hilbert作用量(1)可以表示成如下形式

$$I=\int\mathrm{d}t\int_\Sigma\mathrm{d}^2x\,N\sqrt{{}^{(2)}g}\left[{}^{(2)}R-2\Lambda+K_{ij}K^{ij}-K^2\right] \tag{10}$$

引入共轭动量$\pi^{ij} = \sqrt{^{(2)}g}\big(K^{ij} - g^{ij}K\big)$，代入上面的方程得到

$$I = \int \mathrm{d}t \int_\Sigma \mathrm{d}^2x \left(\pi^{ij}\dot{g}_{ij} - N\mathcal{H} - N_i\mathcal{H}^i\right) \tag{11}$$

其中$\mathcal{H}$称为Hamilton约束，$\mathcal{H}^i$称为动量约束，分别表示为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{^{(2)}g}}\big(\pi_{ij}\pi^{ij} - \pi^2\big) - \sqrt{^{(2)}g}\big(^{(2)}R - 2\Lambda\big), \quad \mathcal{H}^i = -2^{(2)}\nabla_j\pi^{ij} \tag{12}$$

上述结果与$3+1$维的ADM分解非常类似。考虑静态非球对称真空解的一般形式

$$\mathrm{d}s^2 = -N(r)^2\mathrm{d}t^2 + f(r)^2\mathrm{d}r^2 + r^2\big(\mathrm{d}\phi + N^\phi(r)\mathrm{d}t\big)^2 \tag{13}$$

可以看到空间度规g_{ij}仅有对角分量，可计算得到

$$\sqrt{^{(2)}g}^{(2)}R = \frac{2f'}{f^2}, \quad K_{r\phi} = \frac{r^2}{2N}(N^\phi)' \tag{14}$$

进一步，约束方程$\mathcal{H}^i = 0$和$\mathcal{H} = 0$分别给出

$$\frac{r^3}{2Nf}(N^\phi)' = A, \quad \frac{1}{f^2} - \frac{A^2}{r^2} = B^2 \tag{15}$$

其中A和B都为积分常数。将度规(13)代入到(10)，对f变分给出场方程

$$\frac{N'}{f^2} + A^2Nr = 0 \quad \Rightarrow \quad N = f^{-1} \tag{16}$$

综合(15)和(16)并取适当的约定，我们最终得到

$$\mathrm{d}s^2 = -\Big(B^2 + \frac{A^2}{r^2}\Big)\mathrm{d}t^2 + \Big(B^2 + \frac{A^2}{r^2}\Big)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\Big(\mathrm{d}\phi + \frac{A^2}{r^2}\mathrm{d}t\Big)^2 \tag{17}$$

如果含负的宇宙学常数$\Lambda = -1/\ell^2$，则$2+1$维黑洞表示为Bañados-Teitelboim-Zanelli度规[1]

$$\mathrm{d}s^2 = -\Big(-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2}\Big)\mathrm{d}t^2 + \Big(-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2}\Big)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\Big(\mathrm{d}\phi - \frac{J}{2r^2}\mathrm{d}t\Big)^2 \tag{18}$$

如果$M > 0$并且$|J| \leqslant M\ell$，则我们有黑洞视界

$$r_\pm^2 = \frac{1}{2}M\ell^2\big(1 \pm \sqrt{1-a^2}\big), \quad a = J/M\ell \tag{19}$$

对于$\Lambda > 0$的情形，Ida证明了附加有主能量条件的Einstein场方程(2)无黑洞解[4]。

记J^{ab}, P^a分别为$2+1$维时空Lorentz变换和平移变换的生成元，满足Lie群$\mathrm{ISO}(2,1)$的对易关系

$$[J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J^c, \quad [J_a, P_b] = \epsilon_{abc}P^c, \quad [P_a, P_b] = 0 \tag{20}$$

其中$J_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}J^{bc}$。引入规范场$A_\mu = e_\mu^a P_a + \omega_\mu^a J_a$，Witten类比于$3+1$维的Palatini作用量证明了$2+1$维真空场作用量可以写成Chern-Simons形式[6]

$$I_{\mathrm{CS}} = \int_M \epsilon^{\lambda\mu\nu}\left[e_{\lambda a}\big(\partial_\mu\omega_\nu^a - \partial_\nu\omega_\mu^a\big) + \epsilon_{abc}e_\lambda^a\omega_\mu^b\omega_\nu^c\right] \tag{21}$$

推广到$\Lambda \neq 0$，还有附加项$\frac{1}{3}\Lambda\epsilon^{\lambda\mu\nu}\epsilon_{abc}e_\lambda^a e_\mu^b e_\nu^c$。可验证(21)在如下变换下不变

$$\delta e_\mu^a = \partial_\mu\rho^a + \epsilon^{abc}e_{\mu b}\tau_c + \epsilon^{abc}\omega_{\mu b}\rho_c, \quad \delta\omega_\mu^a = \partial_\mu\tau^a + \epsilon^{abc}\omega_{\mu b}\tau_c \tag{22}$$

其中ρ^a和τ^a为无穷小参数。对作用量(21)变分，即可给出e_μ^a和ω_μ^a的约束方程

$$\epsilon^{\mu\nu}\left[\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \epsilon^{abc}(\omega_{\mu b}e_{\nu c} - \omega_{\nu b}e_{\mu c})\right] = 0, \quad \epsilon^{\mu\nu}\big(\partial_\mu\omega_\nu^a - \partial_\nu\omega_\mu^a + \epsilon^{abc}\omega_{\mu b}\omega_{\nu c}\big) = 0 \tag{23}$$

在正则量子化中，e_μ^a与ω_μ^a是共轭变量，上式作用于波函数即给出一阶形式的Wheeler-DeWitt方程[2]。

参考文献

[1] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, *Black Hole in Three-Dimensional Spacetime*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992).

[2] S. Carlip, *Quantum Gravity in* $2+1$ *Dimensions*, Cambridge University Press (1998).

[3] S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft, *Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space*, Ann. Phys. **152** (1984).

[4] D. Ida, *No Black-Hole Theorem in Three-Dimensional Gravity*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000).

[5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons (1972).

[6] E. Witten, $2+1$ *Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System*, Nucl. Phys. B **311** (1988).