

轴矢流反常的泛函积分方法

潘瓚

panzan12@mails.ucas.ac.cn

中国科学院大学 量子场论讨论课

2013/6/15

轴矢流反常

反常：拉氏密度的对称性与重整化不相容

轴矢流： $j^{\mu 5a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \tau^a \psi$

轴矢流反常

反常：拉氏密度的对称性与重整化不相容

轴矢流： $j^{\mu 5a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \tau^a \psi$

- $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 衰变，Adler-Bell-Jackiw 反常方程
- 不能通过选取特定的正规化方案来消除反常
 - ▶ Pauli-Villars 正规化：引入的重质量费米子破坏手征对称性
 - ▶ 维数正规化： γ^5 的定义不能直接推广到任意维数空间
- 轴矢流反常只出现在含奇数个 γ^5 作用顶点的单圈图中
- 线性发散的积分在作动量平移变换后会给出一个有限项
- 反常流与规范场耦合会破坏 Slavnov-Taylor 恒等式
- 在 Fujikawa 的方法中，反常由泛函积分测度的改变所导致

参考文献

- Kazuo Fujikawa, *Path-Integral Measure for Gauge-Invariant Fermion Theories*, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979).
- Kazuo Fujikawa, *Path Integral for Gauge Theories with Fermions*, Phys. Rev. D **21**, 2848 (1980).
- Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, vol. II: Modern Applications*, Section 22.2, pp. 362–370.
- Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Section 19.2, pp. 664–667.
- 戴元本, 相互作用的规范理论, 第10.3小节。
- 郑汗青, 量子规范场论讲义, 第11.2小节。

积分测度

记 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a(x)t^a$, 考虑费米子场的泛函积分

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(i \int d^4x \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi \right) \quad (1)$$

积分测度

记 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a(x)t^a$, 考虑费米子场的泛函积分

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(i \int d^4x \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi \right) \quad (1)$$

设无穷小参数 $\theta(x) = \theta^a(x)\tau^a$, 取如下定域规范变换

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^0 U^\dagger(x)\gamma^0 \quad (2)$$

则泛函积分 $Z[A]$ 的测度变为

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = [\det U(x) \det(\gamma^0 U^\dagger(x)\gamma^0) \delta^{(4)}(x-y)]^{-1} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \quad (3)$$

对于 $U(x) = e^{i\theta(x)}$, 我们有 $\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$ 。

正规子

对于 $U(x) = e^{-i\theta(x)\gamma^5}$, 可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' &= [\det U(x) \delta^{(4)}(x-y)]^{-2} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \\ &= \exp \left[i \int d^4x \theta^a(x) \mathcal{A}^a(x) \right] \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $\mathcal{A}^a(x) = 2 \operatorname{tr}(\tau^a \gamma^5) \delta^{(4)}(x-y)|_{y=x}$ 。

正规子

对于 $U(x) = e^{-i\theta(x)\gamma^5}$, 可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' &= [\det U(x)\delta^{(4)}(x-y)]^{-2} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \\ &= \exp \left[i \int d^4x \theta^a(x) \mathcal{A}^a(x) \right] \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\end{aligned}\quad (4)$$

其中 $\mathcal{A}^a(x) = 2 \operatorname{tr}(\tau^a \gamma^5) \delta^{(4)}(x-y)|_{y=x}$ 。作规范不变的正规化使得

$$\mathcal{A}^a(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} 2 \operatorname{tr} \left[\tau^a \gamma^5 f(-\not{D}_x^2/M^2) \delta^{(4)}(x-y) \right] \Big|_{y=x} \quad (5)$$

其中正规子 $f(s)$ 为任意光滑函数, 满足边界条件

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s f'(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s f'(s) = 0 \quad (6)$$

利用 δ -函数的 Fourier 表示, 我们可以计算

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^a(x) &= 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} [\tau^a \gamma^5 f(-\not{D}_x^2/M^2) e^{ik \cdot (x-y)}] \Big|_{y=x} \\ &= 2M^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} [\tau^a \gamma^5 f(-(i\not{k} + \not{D}_x/M)^2)]\end{aligned}\tag{7}$$

利用 δ -函数的 Fourier 表示, 我们可以计算

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^a(x) &= 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} [\tau^a \gamma^5 f(-\not{D}_x^2/M^2) e^{ik \cdot (x-y)}] \Big|_{y=x} \\ &= 2M^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} [\tau^a \gamma^5 f(-(i\not{k} + \not{D}_x/M)^2)]\end{aligned}\quad (7)$$

将 $f(s)$ 在 $s = k^2$ 处展开, 保留 $M \rightarrow \infty$ 时的非零项即给出

$$\mathcal{A}^a(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f''(k^2) \operatorname{tr}(\tau^a \gamma^5 \not{D}_x^4) \quad (8)$$

其中我们需要用到矩阵 Kronecker 积的以下性质

$$\operatorname{tr}(\tau^a t^b \cdots t^c \gamma^\mu \cdots \gamma^\nu) = \operatorname{tr}(\tau^a t^b \cdots t^c) \operatorname{tr}(\gamma^\mu \cdots \gamma^\nu) \quad (9)$$

作 Wick 转动并利用 $f(s)$ 的边界条件, 我们有

$$\int d^4k f''(k^2) = i \int_0^\infty 2\pi^2 \kappa^3 f''(\kappa^2) d\kappa = i\pi^2 \int_0^\infty s f''(s) ds = i\pi^2 \quad (10)$$

作 Wick 转动并利用 $f(s)$ 的边界条件, 我们有

$$\int d^4k f''(k^2) = i \int_0^\infty 2\pi^2 \kappa^3 f''(\kappa^2) d\kappa = i\pi^2 \int_0^\infty s f''(s) ds = i\pi^2 \quad (10)$$

利用 Dirac 算子 $\not{D}$ 的以下恒等式

$$\begin{aligned} \not{D}_x^2 &= \frac{1}{4} \{D_x^\mu, D_x^\nu\} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} + \frac{1}{4} [D_x^\mu, D_x^\nu] [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ &= -D_x^2 - \frac{i}{4} g F_{\mu\nu}^b t^b [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \end{aligned} \quad (11)$$

代入到 $\mathcal{A}^a(x)$ 的表达式, 我们给出

$$\mathcal{A}^a(x) = -\frac{g^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(\tau^a t^b t^c) \quad (12)$$

轴矢流的散度方程

拉氏密度 $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$ 的改变量为

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\theta^a\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\tau^a\psi + 2im\theta^a\bar{\psi}\gamma^5\tau^a\psi \quad (13)$$

轴矢流的散度方程

拉氏密度 $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$ 的改变量为

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \theta^a \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \tau^a \psi + 2im\theta^a \bar{\psi} \gamma^5 \tau^a \psi \quad (13)$$

代入到泛函积分 $Z[A]$, 我们可以得到

$$\delta Z[A] = i \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \int d^4x \theta^a(x) [\mathcal{A}^a(x) - \partial_\mu j^{\mu 5a}(x) + 2imj^{5a}(x)] \quad (14)$$

对 θ^a 取泛函导数, 即给出轴矢流的散度方程

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = 2imj^{5a} - \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(\tau^a t^b t^c) \quad (15)$$

本征方程

在 Wick 转动后, $i\mathcal{D}$ 为厄米算子, $\phi_n(x)$ 为本征函数

$$i\mathcal{D}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x) \quad (16)$$

其中本征值 λ_n 为实数。正交性和完备性条件分别为

$$\int d^4x \phi_m^\dagger(x)\phi_n(x) = \delta_{mn}, \quad \sum_n \phi_n(x)\phi_n^\dagger(y) = \delta^{(4)}(x-y) \quad (17)$$

本征方程

在 Wick 转动后, $i\mathcal{D}$ 为厄米算子, $\phi_n(x)$ 为本征函数

$$i\mathcal{D}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x) \quad (16)$$

其中本征值 λ_n 为实数。正交性和完备性条件分别为

$$\int d^4x \phi_m^\dagger(x)\phi_n(x) = \delta_{mn}, \quad \sum_n \phi_n(x)\phi_n^\dagger(y) = \delta^{(4)}(x-y) \quad (17)$$

将完备性条件代入到 $\mathcal{A}(x)$, 我们给出

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= 2 \sum_n \text{tr} [\gamma^5 f(-\mathcal{D}_x^2/M^2) \phi_n(x) \phi_n^\dagger(x)] \\ &= 2 \sum_n f(\lambda_n^2/M^2) \phi_n^\dagger(x) \gamma^5 \phi_n(x) \end{aligned} \quad (18)$$

零模解

由于 γ^5 和 $i\not{D}$ 反对易, 所以 $\gamma^5\phi_n(x)$ 仍为 $i\not{D}$ 的本征函数, 本征值为 $-\lambda_n$ 。结合正交条件可以看出, 仅有零模解对 $\mathcal{A}(x)$ 的四维积分有贡献, 即得

$$\begin{aligned}\int d^4x \mathcal{A}(x) &= 2 \int d^4x f(0) \phi_0^\dagger(x) \gamma^5 \phi_0(x) \\ &= 2 \int d^4x \left[\sum_u \phi_u^\dagger(x) \phi_u(x) - \sum_v \phi_v^\dagger(x) \phi_v(x) \right]\end{aligned}\quad (19)$$

其中 ϕ_u 和 ϕ_v 分别是具有正、负手征性的零本征值的解

$$i\not{D}\phi_u = 0, \quad \gamma^5\phi_u = \phi_u, \quad i\not{D}\phi_v = 0, \quad \gamma^5\phi_v = -\phi_v \quad (20)$$

记正、负手征性的零模个数分别为 n_+ 和 n_- , 则 $n_+ - n_-$ 称为 Dirac 算子 $i\not{D}$ 的指标。

利用轴矢流反常的结果，即得 Atiyah-Singer 指标定理

$$\begin{aligned}
 n_+ - n_- &= -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) \\
 &= -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \operatorname{tr} \left[A_\nu F_{\rho\sigma} + \frac{2}{3} (ig A_\nu A_\rho A_\sigma) \right]
 \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 为对偶场强。

利用轴矢流反常的结果，即得 Atiyah-Singer 指标定理

$$\begin{aligned} n_+ - n_- &= -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \operatorname{tr} \left[A_\nu F_{\rho\sigma} + \frac{2}{3} (ig A_\nu A_\rho A_\sigma) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 为对偶场强。考虑以下不等式

$$\int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \geq 0 \quad (22)$$

它给出欧氏作用量的下限

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \geq 8\pi^2 |n_+ - n_-| \quad (23)$$

当且仅当 $F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}^{\mu\nu}$ 时取等号，分别称为自对偶场和反对偶场。

谢谢！